Schulstunde

in doppelter Länge!

Wie löst man lineare Gleichungssysteme?

Ein Text von

Friedrich Buckel

Datei Nr. 12178

30. April 2023

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

Am Anfang der Unterrichtsstunde begrüße ich alle anwesenden Schüler und zwar online, oder die das lesen, was ich denke und aufschreibe.

Also willkommen beim Thema „Gleichungssysteme“!

Ich beginne mit einigen Grundlagen über lineare Gleichungen mit einer Unbekannten.
Dann schauen wir uns an, wie man mit Gleichungen umgeht, die zwei Unbekannte haben.

Dann kommen wir zum eigentlichen Thema: Wie kann man ein System aus zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten lösen? Du wirst drei Methoden kennen lernen. Jede von ihnen passt zu einer bestimmten Art von Gleichungssystem. Daher sollte man sie alle drei kennen lernen.

Ich habe diese etwas längere Unterrichtsstunde in 26 kleine Abschnitte aufgeteilt. Sie sollen unsere Unterhaltung simulieren. Ich erkläre dir etwas und gebe dir eine kleine Aufgabe. Es ist wichtig, dass du sie selbständig löst, bevor du meine Lösung im nächsten Abschnitt ansiehst. Denn man lern mehr durch eigenes Tun und Denken, durchlesen und verstanden haben ist weniger effektiv, was den Lernprozess angeht.

In dieser Einführungsstunde geht es nur um Systeme mit 2 Unbekannten. Dazu gibt es in meiner Mathe-CD noch ein Themenheft Nr. 12180. Dort zeige ich auch, wie man 3 Gleichungen mit 2 Unbekannten untersucht.

Viel interessanter wird es im Text 12181: Dor geht es um Systeme mit 3 oder 4 Unbekannten.
Das alles ist noch auf dem Niveau von Klassenstufe 9. In der Oberstufe wird das ausführlicher betrieben, dann kommen Methoden der Vektorrechnung dazu, und Determinanten.

Doch nun wollen wir anfangen!

$\boxed{1}$ Zu Beginn dieser Stunde

reden wir über **Gleichungen**. Diese begegnen einem schon früh.

Gleichungen können eine Unbekannte enthalten wie $x+3=7$ oder $3\cdot y=15$.

Die Buchstaben x und y nennt man auch **Variable, Platzhalter** oder einfach **Unbekannte**,

Wenn du eine Gleichung lösen sollst, dann heißt das: **„Suche eine Zahl, die beim Ersetzen der Variablen eine wahre Aussage ergibt, die also „stimmt“.**

Man nennt das „**die Probe machen**“:

Beispiele:

Die Zahl 5 ist Lösung der Gleichung $x+3=7$, denn $\boxed{4}+3=7$ ist eine **wahre Aussage**.

Die Zahl 5 ist keine Lösung dieser Gleichung, weil $\boxed{5}+3=7$ eine **falsche Aussage** ist.

Dagegen ist 5 eine Lösung der Gleichung $3\cdot y=15$, denn $3\cdot\boxed{5}=15$ ist eine **wahre Aussage**.

Ich gehe davon aus, dass du, lieber Leser, schon gelernt hast, wie man solche Gleichungen löst.

Versuche es mal selbst und berechne die Lösung der Gleichung $7x-5=4x+7$.

Wenn du fertig bist, gehe auf die nächste Seite zu Abschnitt $\boxed{2}$.

Dort zeige ich dir meine ausführliche Lösung.

$\boxed{14}$ Die Probe:

Dazu setzt man Lösungspaar $\left(\frac{7}{6}\,\middle|\,-\frac{1}{3}\right)$ in das System $\left\{\begin{matrix}2x+4y=1\\4x+5y=3\end{matrix}\right\}$ $\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$ ein.

$$\left\{\begin{matrix}2\cdot\boxed{\frac{7}{6}}+4\cdot\boxed{-\frac{1}{3}}=1\\4\cdot\boxed{\frac{7}{6}}+5\cdot\boxed{-\frac{1}{3}}=3\end{matrix}\right\}\quad\begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

Gleichung (1) führt auf $\frac{7}{3}-\frac{4}{3}=1$ und das ist eine wahre Aussage,

Gleichung (2) führt auf 5 $\frac{14}{3}-\frac{5}{3}=3$ und das ist ebenso eine wahre Aussage.

Die Probe liefert eine Bestätigung der Rechnung.

Die Lösung der dritten Aufgabe folgt in $\boxed{15}$

$\boxed{2}$ Die **Lösungsmethode** besteht darin, dass man auf beiden Seiten der Gleichung dieselben „Änderungen" macht, wobei sich die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern darf.

1. Schritt: Damit 4x rechts verschwindet, subtrahiere ich auf beiden Seiten 4x.
Man schreibt den Befehl („subtrahiere 4x") hinter einen *Befehlsstrich* an die Gleichung.

Etwa so $7x-5=4x+7 \quad | -4x$ (1)

Das ergibt $7x-5-4x=4x+7-4x$

und führt zu: $3x-5=7$ (2)

2. Schritt: Jetzt soll links -5 verschwinden. Das gelingt, indem man beidseitig 5 addiert.

$3x-5=7 \quad | +5$

Ausführlich : $3x\underbrace{-5+5}_{=0}=7+5$

Ergebnis: $3x=12$ (3)

3. Schritt: Als letztes dividiert man links und rechts durch 3 und erhält $x=4$ (4).

Meine Umformungen haben zu einer einfachen Endgleichung (4) geführt. Sie hat erkennbar die Lösungszahl 4. Ich erkläre dazu etwas in Abschnitt $\Rightarrow \boxed{3}$

$\boxed{15}$ **Musterlösung Aufgabe (3)** $\begin{cases} 7x+3y=1 & (1) \\ 4x+2y=\frac{1}{3} & (2) \end{cases}$

Die beiden in Gleichung (1) und (2) gesehenen Vorgehensweisen klappen hier nicht.
Man kann keine der beiden Gleichungen so multiplizieren, dass bei x oder y ein gleiches Vielfaches entsteht. **Hier muss man beide Gleichungen vervielfachen:**

1. Möglichkeit: Man multipliziert (1) mit 4 und (2) mit 7, dann entsteht in beiden Gleichungen 28 x, was bei nachfolgender Subtraktion wegfällt.

2. Möglichkeit: Man multipliziert (1) mit 2 und (2) mit 3, dann entsteht in beiden Gleichungen 6y, was bei nachfolgender Subtraktion wegfällt.

1. Möglichkeit: $\begin{Bmatrix} 7x+3y=1 \\ 4x+2y=\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) & |\cdot 4 \\ (2) & |\cdot 7 \end{matrix}$

$\begin{Bmatrix} 28x+12y=4 \\ 28x+14y=\frac{7}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$

(4) – (3): $2y=\frac{7}{3}-\frac{12}{3}$

$2y=-\frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y=-\frac{5}{6}}$

y in (1) ersetzen: $7x+3\cdot\boxed{-\frac{5}{6}}=1 \quad | +\frac{5}{2}$

$7x=\frac{7}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{1}{2}}$

Die zweite Möglichkeit sollst du bitte durchrechnen. $\Rightarrow \boxed{16}$

$\boxed{3}$ Hier nochmals zusammengefasst die Musterlösung:

$$
\begin{array}{lll}
7x-5=4x+7 & \mid -4x & (1) \\
3x-5=7 & \mid +5 & (2) \\
3x=12 & \mid :3 & (3) \\
x=4 & & (4)
\end{array}
$$

Die <u>Endgleichung</u> (4) hat die Lösungszahl 4, denn „4 = 4“ ist eine wahre Aussage. Gesucht ist aber die Lösung der <u>Anfangsgleichung</u> (1). Die hier gemachten Umformungen garantieren, dass die Zwischengleichungen (3), (2) sowie die Anfangsgleichung (1) <u>dieselbe Lösung</u> 4 haben. Dies klappt nur, weil wir bei den Umformungen sogenannte **Äquivalenzumformungen** vorgenommen haben. **Die heißen so, weil sie die Lösungsmenge der Gleichung nicht ändern.**

Diese sind erlaubte Äquivalenzumformungen:

Addition (und Subtraktion) eines Terms (also auch einer Zahl), Multiplikation (und daher auch Division) mit einer Zahl ungleich 0.

Dagegen kann die Multiplikation mit einem Term, der x-enthält, die Lösungsmenge vergrößern, und eine Division durch so einen Term kann sie verkleinern und ist daher keine Äquivalenzumformung, also zur Lösung nicht erlaubt.

Aufgabe für dich: Löse auf diese Weise die Gleichung $3x+2=5x-13$. $\Rightarrow$ $\boxed{4}$

$\boxed{16}$ **2. Möglichkeit:**

$$\begin{Bmatrix} 7x+3y=1 \\ 4x+2y=\frac{1}{3} \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) & \mid\cdot 2 \\ (2) & \mid\cdot 3 \end{matrix}$$

$$\begin{Bmatrix} 14x+6y=2 \\ 12x+6y=1 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

(3) – (4): $2x=1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\frac{1}{2}}$

x in (2) ersetzen: $4\cdot\boxed{\frac{1}{2}}+2y=\frac{1}{3} \qquad \mid -2$

$$2y=\frac{1}{3}-2$$

$$2y=-\frac{5}{3} \qquad \mid :2$$

$$\boxed{y=-\frac{5}{6}}$$

Ergebnis: Beide Methoden ergeben $\mathbb{L}=\left\{\left(\frac{1}{2}\mid-\frac{5}{6}\right)\right\}$.

Die zweite Möglichkeit ist günstiger, denn da fällt sofort der Bruch $\frac{1}{3}$ weg usw.

Nun folgt eine neue Lösungsmethode für Gleichungssysteme. $\Rightarrow$ $\boxed{17}$

$\boxed{4}$ So oder ähnlich hätte ich mir deine Lösung gewünscht:

$$\begin{aligned} 3x+2&=5x-13 && \mid -5x \\ -2x+2&=-13 && \mid -2 \\ -2x&=-15 && \mid :(-2) \\ x&=\tfrac{15}{2} \end{aligned}$$

Nach dieser Wiederholung kommen wir zu Gleichungen mit zwei Unbekannten.

Im Abschnitt $\boxed{5}$ geht es los!

$\boxed{17}$ Die <u>zweite</u> Berechnungsmethode für ein lineares Gleichungssystem

Lösung mit dem Einsetzungsverfahren

Gegeben ist das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} 2x+\ \ y=5 \\ -x+2y=5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Ziel jedes Lösungsverfahrens ist es, möglichst rasch eine Unbekannte zu eliminieren.

Beim Einsetzungsverfahren stellt man eine Gleichung nach x oder y um und ersetzt damit diese Variable in der anderen Gleichung.

Hier kann man (1) sofort umstellen in $y=\mathbf{5-2x}$ (3)

und dann y in (2) ersetzen. $-x+2\cdot(\mathbf{5-2x})=5$

Vereinfachen: $-x+10-4x=5 \quad \mid -10$

$-5x=-5 \quad \mid :(-5)$

$\boxed{x=1}$

x in (3) ersetzen: $y=5-2\cdot\boxed{1}=3$

Ergebnis: Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{(1\mid 3)\}$

Bitte löse selbst:

(1) $\begin{Bmatrix} 4x-\ \ y=2 \\ 2x+3y=8 \end{Bmatrix}$ Tipp: Eliminiere y

(2) $\begin{Bmatrix} 2x+4y=1 \\ 4x+5y=3 \end{Bmatrix}$ Tipp: Eliminiere x.

$\Rightarrow$ $\boxed{18}$

$\boxed{5}$ Gleichungen mit zwei Unbekannten

Wie soll man diese Gleichung lösen? $2x+y=5$ (1)

Sie hat zwei Unbekannte. Das Problem dabei ist: Wenn ich x berechnen will, muss ich y subtrahieren:

$$2x+y=5 \quad | -y$$

und erhalte $2x=5-y$ (2)

Oder ich stelle die Gleichung nach y um $2x+y=5 \quad | -2x$

und erhalte $y=5-2x$ (3)

In beiden Fällen erhalte ich keine Lösungszahl, denn rechts steht ja noch eine Unbekannte, x oder y . x hängt also von y ab oder umgekehrt.

Also: **Wenn wir eine Gleichung mit zwei Unbekannten haben, können wir keine der beiden Unbekannten berechnen.**

Idee: Wenn y von x abhängt, sollte man vielleicht ein x vorgeben

Ich wähle zum Beispiel x = 2, dann lautet (3): $y=5-2\cdot\boxed{2}=5-4=1$. Das führt mich zum

Zahlenpaar $(x\,|\,y)=(2\,|\,1)$, das ist eine Lösung der Gleichung $2x+y=5$.

Beweis: Die Probe (Einsetzen) ergibt diese wahre Aussage. $2\cdot\boxed{2}+\boxed{1}=5$

Aufgabe: Berechne weitere Lösungspaare, indem du für x folgende Zahlen verwendest:

$x=1,\ x=0,\ x=-1,\ x=-2$. $\Rightarrow \boxed{6}$

$\boxed{18}$ *Meine Lösung mit dem Einsetzungsverfahren*

Musterlösung Aufgabe (1)

$$\begin{Bmatrix} 4x-\ \ y=2 \\ 2x+3y=8 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

Aus (1): $y=\mathbf{4x-2}$ (3)

Einsetzen in (2): $2x+3\cdot(\mathbf{4x-2})=8$

$2x+12x-6=8 \quad | +6$

$14x=14 \quad | :14$

$\boxed{x=1}$

Einsetzen in (3): $y=4\cdot\boxed{1}-2=2$

Lösungsmenge $\mathbb{L}=\{(1|2)\}$

Die Lösung des 2. Gleichungssystems steht in $\Rightarrow \boxed{19}$

$\boxed{6}$ Wähle ich x = 1, dann lautet (3): $y = 5 - 2 \cdot \boxed{1} = 5 - 2 = 3$ $(1|3)$ ist eine Lösung

Wähle ich x = 0, dann lautet (3): $y = 5 - 2 \cdot \boxed{0} = 5 - 0 = 5$ $(0|5)$ ist eine Lösung

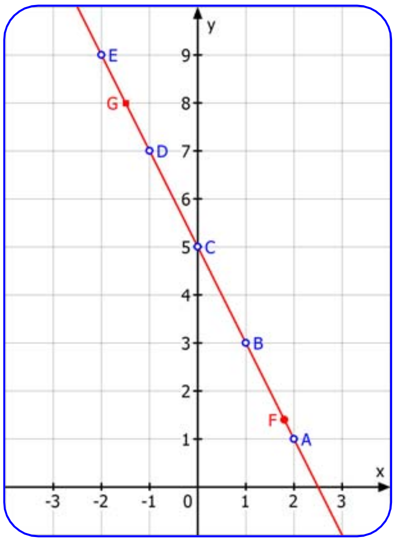
Wähle ich x = -1, dann lautet (3): $y = 5 - 2 \cdot \boxed{-1} = 5 + 2 = 7$ $(-1|7)$ ist eine Lösung

Wähle ich x = -2, dann lautet (3): $y = 5 - 2 \cdot \boxed{-2} = 5 + 4 = 9$ $(-2|9)$ ist eine Lösung

So könnte man weiter machen. Man erkennt:

Zu jedem vorgegebenen x-Wert gibt es einen passenden y-Wert.
Beide zusammen bilden ein Zahlenpaar, das ein Lösungspaar ist.
Die Lösung einer Gleichung mit zwei Unbekannten besteht also aus Zahlenpaaren.
Und wie du schnell erkennst, können das unendlich viele Paare sein.

MERKE: **Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung $ax + by = c$ *kann* unendlich viele Zahlenpaare enthalten.**



Eine Gleichung dieser Form ***heißt linear***, weil x und y nur den Exponenten 1 haben.

($x^2 + 2y = 4$ ist nicht linear, denn in x ist sie quadratisch.)

Die Lösungsmenge enthält hier unendlich viele Zahlenpaare.
Man kann also immer nur einige davon anzeigen, etwa:

$$\mathbb{L} = \{\ldots, (2|1), (1|3), (0|5), (-1|7), (-2|9), \ldots\}$$

Erinnerst du dich daran, dass man diese Paare als Punkte in einem Achsenkreuz beschreiben kann. Ich habe diese 5 Paare als Punkte A bis E eingetragen. ***Sie liegen alle auf einer Geraden.***

Aufgabe: Ich habe dazu zwei weitere Punkte in die Zeichnung eingetragen.
Der Punkt F hat x = 1,8. Der Punkt G hat y = 8. Wie lauten die zugehörenden Paare? $\Rightarrow$ $\boxed{7}$

$\boxed{19}$ **Musterlösung Aufgabe (2)**

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 & (1) \\ \boxed{4x} + 5y = 3 & (2) \end{cases}$$

Ich stelle nach 2x um zum Einsetzen: $2x = \boxed{1 - 4y}$ (3)

Das Doppelte in (2) einsetzen: $\boxed{2 - 8y} + 5y = 3$

$2 - 3y = 3 \quad |\ -2$

$-3y = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = -\frac{1}{3}}$

Einsetzen in (3): $2x = 1 - 4 \cdot \boxed{-\frac{1}{3}} = 1 + \frac{4}{3} = \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{7}{6}}$

Lösungsmenge $\mathbb{L} = \left\{\left(\frac{7}{6} \,\middle|\, -\frac{1}{3}\right)\right\}$

Nun folgt das dritte Lösungsverfahren: $\Rightarrow$ $\boxed{20}$

$\boxed{7}$ Die Gleichung heißt $2x + y = 5$

Der Punkt F hat x = 1,8. Wie groß muss dann y sein, damit $(1{,}8 \mid y) \in \mathbb{L}$?

Dazu ersetze ich x in der Gleichung: $2 \cdot \boxed{1{,}8} + y = 5 \quad | -3{,}6$

und stelle sie nach y um; $y = 5 \boxed{-3{,}6} = 1{,}4$

Ergebnis: $(-1{,}5 \mid 8) \in \mathbb{L}$

Der Punkt G hat y = 8. Wie groß muss dann x sein, damit $(x \mid 8) \in \mathbb{L}$?

Dazu ersetze ich y in der Gleichung: $2x + \boxed{8} = 5 \quad | -8$

$2x = -3 \quad | :2$

Man erhält: $x = -\frac{3}{2} = -1{,}5$

Ergebnis: $(-1{,}5 \mid 8) \in \mathbb{L}$

Wichtig ist:

1. Die lineare Gleichung $2x + y = 5$ besitzt unendlich viele Lösungspaare.
2. Man kann Lösungspaare bestimmen, wenn man x oder y vorgibt.
3. Die Lösungspaare liegen auf einer Geraden.

Das probiere nun an Hand der nächsten Gleichung aus: $2y - x = 5$:

a) **Berechne 6 Paare der Lösungsmenge.**

b) **Finde die Paare mit x = 3,5 und mit y = -3.**

$\Rightarrow \boxed{8}$

$\boxed{20}$ Die <u>dritte</u> Berechnungsmethode für ein lineares Gleichungssystem

Das *Gleichsetzungsverfahren* passt hier: $\begin{Bmatrix} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{1}{2}x + 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

„Wenn die linken Seiten gleich sind, müssen es auch die rechten Seiten sein!“

Also folgt: $2x - 4 = -\frac{1}{2}x + 1 \quad | +\frac{1}{2}x \text{ und } +4$

$2x + \frac{1}{2}x = 1 + 4$

$\frac{5}{2}x = 5 \quad | \cdot\frac{2}{5}$ (das ist dasselbe wie $| :\frac{5}{2}$)

$x = 5 \cdot \frac{2}{5} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 2}$

Einsetzen in (1). $y = 2 \cdot \boxed{2} - 4 = 0$

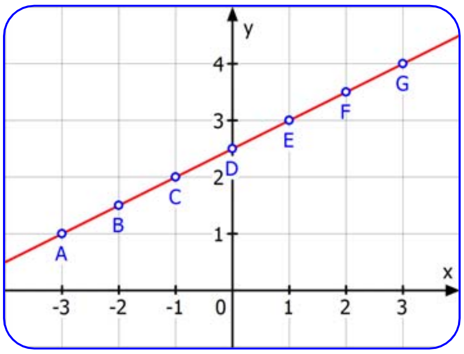
Lösungsmenge $\mathbb{L} = \{(2 \mid 0)\}$

Eine letzte Übung für Dich: $\begin{Bmatrix} y = \frac{2}{3}x + 1 \\ y = -\frac{1}{2}x - 3 \end{Bmatrix}$ $\Rightarrow \boxed{21}$

$\boxed{8}$ Das ist meine Lösung zu $2y-x=5$

a) Ich habe folgende Paare berechnet:

x = -3 ergibt $2y-\boxed{-3}=5$ also $2y=2$ und y = 1
x = -2 ergibt $2y-\boxed{-2}=5$ also $2y=3$ und y = 1,5
x = -1, ergibt $2y-\boxed{-1}=5$ also $2y=4$ und y = 2
x = 0 ergibt $2y-\boxed{0}=5$ also $2y=5$ und y = 2,5
x = 1 ergibt $2y-\boxed{1}=5$ also $2y=6$ und y = 3
x = 2 ergibt $2y-\boxed{2}=5$ also $2y=7$ und y = 3,5
x = 3 ergibt $2y-\boxed{3}=5$ also $2y=8$ und y = 4



Einige davon schreibt man in die Lösungsmenge:

$$\mathbb{L}=\{...(-3\,|\,1),(-2\,|\,1{,}5),(-1\,|\,2),(0\,|\,2{,}5),(1\,|\,3),(2\,|\,3{,}5),(3\,|\,4),...\}$$

b) Setze ich für x die Zahl 3,5 ein, folgt $2y-\boxed{3{,}5}=5 \quad |\ +3{,}5$

$2y=8{,}5 \quad |\ :2$

$y=4{,}25$

Setze ich für y die Zahl -3 ein, folgt $2\cdot\boxed{-3}-x=5 \quad |\ +6$

$-x=11 \quad |\ \cdot(-1)$

$x=-11$

Also gehören auch die Paare $(3{,}5\,|\,4{,}25)$ und $(-11\,|\,-3)$ zur Lösungsmenge.

Es geht weiter in $\Rightarrow$ $\boxed{9}$

$\boxed{21}$ *Meine Lösung mit dem Gleichsetzungsverfahren*

$$\begin{cases} y=\frac{2}{3}x+1 & (1)\\ y=-\frac{1}{2}x-3 & (2)\end{cases}$$

Gleichsetzen: $\frac{2}{3}x+1=-\frac{1}{2}x-3 \quad |\cdot 6$

Hier empfehle ich, die Gleichung mit dem Hauptnenner von 3 und 2, also mit 6 zu multiplizieren, dann ist die Gefahrenquelle „Bruch“ beseitigt.

$6\cdot\frac{2}{3}x+6=6\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)x-18$

Kürzen: $4x+6=-3x-18 \quad |\ +3x$ und -6

$7x=-24 \quad |\ :7$

$\boxed{x=-\frac{24}{7}}$

Einsetzen in (2): $y=-\frac{1}{2}\cdot\boxed{-\frac{24}{7}}-3=\frac{12}{7}-\frac{21}{7}=-\frac{9}{7}$

Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{\left(-\frac{24}{7}\,|\,-\frac{9}{7}\right)\right\}$ **Alles klar?** $\Rightarrow$ $\boxed{22}$

$\boxed{9}$ Unser Stundenthema lautet ***Gleichungssysteme***. Genauer gesagt wollen wir Systeme aus zwei Gleichungen zugleich lösen. Etwa dieses: $\begin{Bmatrix} 2x+y=5 \\ 2y-x=5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Jede Gleichung, die x und y enthält, stellt eine Bedingung für diese beiden Größen dar. Wie wir gesehen haben, reicht eine Gleichung, also eine Bedingung nicht aus, um x und y berechnen zu können. Denn man findet zu jeder Gleichung unendlich viele Paare.

Unser erstes Gleichungssystem

Für welche x und y gelten beide Gleichungen?

$2x+y=5$ und $2y-x=5$

Ich drücke es mathematischer so aus:

Finde die Paare, die das System $\begin{Bmatrix} 2x+y=5 \\ 2y-x=5 \end{Bmatrix} \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$ **lösen.**

Kommen dir diese beiden Gleichungen bekannt vor? Richtig! Wir haben ihre Lösungsmengen bereits gefunden:

Lösungsmenge von (1): $\mathbb{L}_1 = \{\dots, (2\,|\,1), \mathbf{(1\,|\,3)}, (0\,|\,5), (-1\,|\,7), (-2\,|\,9), \dots\}$

Lösungsmenge von (2): $\mathbb{L}_2 = \{\dots(-3\,|\,1), (-2\,|\,1{,}5), (-1\,|\,2), (0\,|\,2{,}5), \mathbf{(1\,|\,3)}, (2\,|\,3{,}5), \dots\}$

Ich habe es uns leicht gemacht: Das Paar $(\mathbf{1\,|\,3})$ gehört zu beiden Lösungsmengen, ist also ein Lösungspaar des Gleichungssystems,. $\Rightarrow$ $\boxed{10}$

$\boxed{22}$ *Nun fassen wir zusammen, was wir gelernt haben*

1. Lineare Gleichungen mit zwei Unbekannten können unendlich viele Zahlenpaare als Lösungen haben. (Es gibt Ausnahmen, die keine Lösung haben wie $0x+0y=1$.)

2. Ein lineares Gleichungssystem kann durch eines der folgenden Verfahren gelöst werden:

   M1 Additions- oder Subtraktionsverfahren

   M2 Einsetzungsverfahren

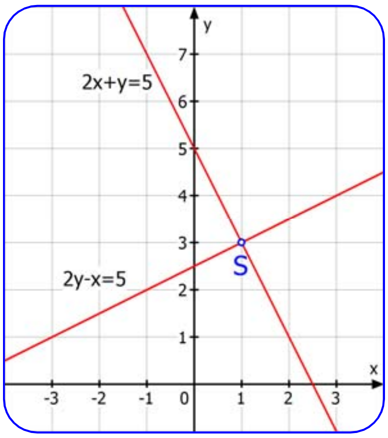
   M3 Gleichsetzungsverfahren

   Die Lösungsmenge eines Gleichungssystems bestand in unseren Beispielen aus einem einzigen Zahlenpaar. (Es gibt Sonderfälle. Dazu folgen am Ende der Stunde Beispiele.)

3. Es ist egal, welches Lösungsverfahren man verwendet, jedoch haben manche Gleichungen ein Merkmal, an dem man erkennt, welche der drei Methoden günstiger ist. $\Rightarrow$ $\boxed{23}$

$\boxed{10}$ Es wird gleich noch interessanter:

Wir haben beide Lösungsmengen als Geraden dargestellt.
Hier eine Zeichnung, die beide Geraden enthält.



Und da das gesuchte Lösungspaar zu beiden Lösungsmengen gehört, muss der zugehörende Punkt auf beiden Geraden liegen.

Mit anderen Worten:
Das Lösungspaar unseres Gleichungssystems entspricht dem Schnittpunkt der beiden Lösungsgeraden.

Wir haben in diesem Beispiel das Lösungspaar nicht durch ein Lösungsverfahren gefunden.
Das holen wir jetzt nach. Welches Rechenverfahrung hilft da weiter?

Unsere Aufgabe, die wir nun angehen, heißt:

Berechne die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit zwei Unbekannten

Es gibt dazu einige Methoden. Drei zeige ich dir. $\Rightarrow$ $\boxed{11}$

$\boxed{23}$

Übung:

Versuche zu erkennen, welche Methode (M1, M2, M3) in den folgenden Beispielen günstig ist:
Du sollst jetzt nicht die Lösung berechnen!

Begründe Deinen Vorschlag.

(a) $\begin{Bmatrix} 5x+2y=24 \\ 3x-2y=8 \end{Bmatrix}$ (b) $\begin{Bmatrix} 2x+y=2 \\ 5x-3y=5 \end{Bmatrix}$

(c) $\begin{Bmatrix} 3x-4y+7=0 \\ 5x+3y+2=0 \end{Bmatrix}$ (d) $\begin{Bmatrix} x-8y=12 \\ 3x-4y=1 \end{Bmatrix}$

(e) $\begin{Bmatrix} x=3y-4 \\ x=y+2 \end{Bmatrix}$ (f) $\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}x+\frac{1}{4}y=2 \\ x-4y=4 \end{Bmatrix}$

Meine Antwort steht in $\Rightarrow$ $\boxed{24}$ **auf Seite 14!**

$\boxed{11}$ Die erste Lösungsmethode für ein lineares Gleichungssystem

Das Additionsverfahren

Gegeben ist das Gleichungssystem $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1)\\(2)\end{array}$

Du weißt, dass man eine Gleichung mit einer Zahl multiplizieren darf, ohne dass sich dabei die Lösungsmenge ändert. Mein Ziel ist es, dass in Gleichung (2) statt $-x$ nun -2x steht.
Also multipliziere ich (2) mit 2, dann entsteht Gleichung (3):

Man schreibt immer das ganze System an: $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ \boxed{-2x} + 4y = 10 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1)\\(3)\end{array}$

Wir können beide Gleichungen addieren: $0x + 5y = 15$

Es ist $0x = 0$ und nach Division durch 5 folgt: $\boxed{y = 3}$

Du weißt schon: Wenn y bekannt ist, erhält man durch Einsetzen den zugehörenden x-Wert.

Aber wo sollen wir einsetzen? In (1): $2x + \boxed{3} = 5 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 1}$

Oder in (2): $-2x + \boxed{12} = 10 \Rightarrow -2x = -2 \xrightarrow{:(-2)} \boxed{x = 1}$

Es ist egal, aus welcher Gleichung man x berechnet, denn der Schnittpunkt beider Geraden liegt auf jeder dieser Geraden, um es so auszudrücken.

Hier die zusammengefasste Lösung in Musterform:

$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ -x + 2y = 5 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1)\\(2)\ \ |\cdot 2\end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 5 \\ \boxed{-2x} + 4y = 10 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l}(1)\\(3)\end{array}$

(1) + (3): $5y = 15 \quad | :5$

$\boxed{y = 3}$

In (1) $2x + \boxed{3} = 5 \quad | -3$

$2x = 2 \quad | :2$

$\boxed{x = 1}$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{(1|3)\}$

Hast du erkannt, worin der Trick mit dem Additionsverfahren steckt?

Wir multiplizieren eine oder beide Gleichungen mit einer geeigneten Zahl, so dass in beiden Gleichungen entweder gleich viele x stehen oder gleich viele y.

Durch Addition (oder gegebenenfalls Subtraktion) der beiden Gleichungen fällt dann x oder y heraus, sodass nur noch eine Gleichung mit einer Unbekannten übrig bleibt.

Dazu kann man dann die zweite Unbekannte berechnen und hat die Lösung.

Aufgaben Löse mit diesem Verfahren nun diese drei Gleichungssysteme:

(1) $\left\{\begin{array}{l} 4x - y = 2 \\ 2x + 3y = 8 \end{array}\right\}$ Tipp: Eliminiere y …

(2) $\left\{\begin{array}{l} 2x + 4y = 1 \\ 4x + 5y = 3 \end{array}\right\}$ Tipp: Eliminiere x

(3) $\left\{\begin{array}{l} 7x + 3y = 1 \\ 4x + 2y = \frac{1}{3} \end{array}\right\}$ Löse zweimal und zwar:

einmal mit Elimination von x, und einmal mit Elimination von y.

$\Rightarrow$ $\boxed{12}$

12 Musterlösung Aufgabe (1)

$$\begin{cases} 4x - \ \ y = 2 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

Um y eliminieren zu können multipliziere ich (1) mit 3:

$$\begin{cases} 12x \boxed{-3y} = 6 \\ \ \ 2x + 3y = 8 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (2) \end{matrix}$$

Addiert man (3) und (2), fällt y weg (Elimination von y): $14x = 14 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1}$

Zur Berechnung von y wird x in (1) ersetzt: $4 \cdot \boxed{1} - y = 2 \qquad | \ -4$

Ausführlich: $4 - y - 4 = 2 - 4$

Zusammengefasst: $-y = -2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = 2}$

Das Lösungspaar heißt also $(1|2)$, die Lösungsmenge ist $\mathbb{L} = \{(1|2)\}$

Die Lösung der 2. Aufgabe folgt in $\Rightarrow$ 13

---

24 *Ich würde so rechnen:*

(a) $\begin{cases} 5x + \boxed{2y} = 24 \\ 3x - \boxed{2y} = 8 \end{cases}$

Mit dem Additionsverfahren (M1) fällt y sofort heraus.
Man kann daher schnell x berechnen

(b) $\begin{cases} 2x + y = 2 \\ 5x - 3y = 5 \end{cases}$

Hier bietet sich das Einsetzungsverfahren (M2) an.
Stelle (1) nach y um: $y = 2 - 2x$ und setze in (2) ein.
Man kann aber auch die erste Gleichung mit 3 multiplizieren und dann mit dem Additionsverfahren y eliminieren.

(c) $\begin{cases} 3x - 4y + 7 = 0 \\ 5x + 3y + 2 = 0 \end{cases}$

Hier benötigt man eine doppelte Multiplikation. Damit beim Subtraktionsverfahren x verschwindet, muss man (1) mit 5 und (2) mit 3 multiplizieren. Will man stattdessen y eliminieren, wird man das Dreifache von (1) zum Vierfachen von (2) addieren.

(d) $\begin{cases} x - 8y = 12 \\ 3x - 4y = 1 \end{cases}$

Stellt man (1) nach x um und setzt x = 12 + 8y in (2) ein erhält man schnell die Lösung (Einsetzungsverfahren M2)
Man könnte auch das Subtraktionsverfahren anwenden:
Gleichung (2) minus das Dreifache von (1) Oder:
Gleichung (1) minus das Doppelte von (2).

(e) $\begin{cases} x = 3y - 4 \\ x = y + 2 \end{cases}$

Gleichsetzungsverfahren (M3)

(f) $\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 2 \\ x - 4y = 4 \end{cases}$

Entweder das Einsetzungsverfahren (nach x aus (2) umstellen)
Oder das Subtraktionsverfahren, z, B. Das Doppelte der ersten Gleichung von der zweiten subtrahieren.

Falls du die Lösungsmengen berechnet hast, das sind meine Ergebnisse:

(a)	$\mathbb{L} = \{(4\,|\,2)\}$	(b)	$\mathbb{L} = \{(1\,|\,0)\}$	(c)	$\mathbb{L} = \{(-1\,|\,1)\}$
(d)	$\mathbb{L} = \{(-2\,|\,-\frac{7}{4})\}$	(e)	$\mathbb{L} = \{(5\,|\,3)\}$	(f)	$\mathbb{L} = \{(4\,|\,0)\}$

$\Rightarrow$ 25

$\boxed{13}$ Musterlösung Aufgabe (2)

Gegeben ist das Gleichungssystem $\begin{Bmatrix} 2x+4y=1 \\ 4x+5y=3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

Um x eliminieren zu können multipliziere ich (1) mit 2:

$$\begin{Bmatrix} 4x+8y=2 \\ 4x+5y=3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (3) \\ (2) \end{matrix}$$

Subtrahiert man (2) von (3), fällt x weg (Elimination von x):

$$3y=-1 \qquad | :3$$

$$\boxed{y=-\tfrac{1}{3}}$$

Zur Berechnung von x ersetze ich y z. B. in (1):

$$2x+4\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right)=1$$

d. h. $2x-\tfrac{4}{3}=1 \qquad | +\tfrac{4}{3}$

$$2x=\tfrac{7}{3} \qquad | :2$$

$$\boxed{x=\tfrac{7}{6}}.$$

Man könnte natürlich auch y in (2) ersetzen:

$$4x+5\cdot\boxed{-\tfrac{1}{3}}=3$$

d. h. $4x-\tfrac{5}{3}=3 \qquad | +\tfrac{5}{3}$

$$4x=\tfrac{14}{3} \qquad | :4$$

$$\boxed{x=\tfrac{14}{3\cdot 4}=\tfrac{7}{6}}$$

Lösungsmenge $\mathbb{L}=\left\{\left(\tfrac{7}{6}\,|\,-\tfrac{1}{3}\right)\right\}$

Mache bitte die Probe mit dieser Lösung! $\Rightarrow$ $\boxed{14}$ **auf Seite 3!**

$\boxed{25}$ Wir sind fast am Ende der Stunde angekommen.

Es gibt zwei Sonderfälle, die ich noch zeige möchte.

Schau dir bitte diese beiden Gleichungssysteme an:

$$(E) \quad \begin{Bmatrix} \tfrac{2}{3}x-y=2 \\ x-\tfrac{3}{2}y=3 \end{Bmatrix} \quad \text{und} \quad (K) \quad \begin{Bmatrix} 2x-3y+12=0 \\ \tfrac{1}{3}x-\tfrac{1}{2}y-1\ =0 \end{Bmatrix}$$

Sie tanzen völlig aus der Reihe. Das bemerkt man erst, wenn man versucht, sie zu lösen:

$\Rightarrow$ $\boxed{26}$

$\boxed{26}$ **Hier also die Lösung der beiden Sonderfälle.**

Lösung von (E): $\begin{Bmatrix} \frac{2}{3}x - y = 2 \\ x - \frac{3}{2}y = 3 \end{Bmatrix} \quad \begin{matrix} (1) & |\cdot 3 \\ (2) & |\cdot 2 \end{matrix}$

Im ersten Schritt beseitige ich die Brüche !!! Ein heißer Tipp, damit vermeidet man oft Fehler.

<u>Und dann erkenne ich, dass beide Gleichungen dieselbe Folgegleichung haben:</u> $\begin{Bmatrix} 2x - 3y = 6 \\ 2x - 2y = 6 \end{Bmatrix}$

Die Gleichung (2) ist nämlich das $\frac{3}{2}$ – fache der Gleichung (1).

Und damit haben beide Gleichungen dieselbe Lösungsmenge:

Wir suchen für unser Gleichungssystem alle Paare, die beide Gleichungen lösen. Wenn aber wie hier beide dieselbe Lösungsmenge haben, dann ist das auch die Lösungsmenge des Systems und diese hat die nicht wie bisher genau ein Lösungspaar sondern unendlich viele Paare.

Stellt man sich die Lösungsmenge als Gerade vor, dann ist doch völlig klar:
Nur zwei identische Geraden haben dieselben Punkte. Welch banale Aufgabe!

Lösung von (F): $\begin{Bmatrix} 2x - 3y + 12 = 0 \\ \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}y - 1 = 0 \end{Bmatrix}$

Ich beseitige die Brüche der zweiten Gleichung indem ich sie Gleichung mit 6 multipliziere.
Dann wird aus der zweiten Gleichung: $2x - 3y - 6 = 0$

Das Gleichungssystem besteht dann aus diesen beiden Gleichungen:

$$\begin{Bmatrix} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x - 3y - 6 = 0 \end{Bmatrix}$$

Subtrahiert man sie, erhält man: $18 = 0$

Das ist ein Widerspruch gegen die Annahme, das System sei lösbar.

Ergebnis: Das System (K) hat also gar keine Lösungspaare:

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{\ \}$.

Wenn zwei Geraden keine gemeinsamen Punkte haben, dann sind sie parallel.
Diesen Sonderfall stellt unser Gleichungssystem dar.

Wenn du noch weitere Übungsbeispiele suchst, schaue in den Text 12180 rein ….

Das war's für heute! Vergiss diese Methoden nicht!

CIAO